**Exercice N° 1 : 6 pts (1.5, 1.5, 1.5, 1.5)**

Montrerdans le langage Lp (¬, ∧, ∀) les déductions suivantes **:**

* 1. ¬P → ¬Q ∨ R, ¬P → Q**├─** P ∨ R
  2. ├─ (P → Q) ∧ (Q → R) → (P → R)
  3. **├─** ∃x ∀y P(x, y) → ∃x P(x, x)
  4. **├─** ∀x (α (x) → β(x)) → (∃x α (x) → ∃x β(x))

avec α∨β=def ¬(¬α∧¬β) et ∀x α (x) =def ¬∃x ¬ α (x).

en admettra la déduction : α **├─** ¬¬ α

**Exercice N°2 : 6 pts ((1, 1, 1), 1, 1, 1)**

**1)** On définit le connecteur noté | (barre de Sheffer, ou encore NAND) par : P | Q = def┐(P ∧ Q)

(a) Donner la table de vérité de la formule (P | Q)

(b) Donner la table de vérité de la formule (P | P). **A quoi elle correspond ?**

(c) Donner la table de vérité de la formule ((P | Q) | (P | Q)). **A quoi elle correspond ?**

**2)** Que peut-on déduire du connecteur {|} ? Justifier votre réponse.

**3)** Trouver une formule équivalente à P ∨ Q, qui n'utilise que la barre de Sheffer.

**4)**  Trouver une formule équivalente à P → Q, qui n'utilise que la barre de Sheffer.

**Exercice N°3 : 8 pts ((1, 1, 1.5), (1.5, 1.5, 1.5))**

Soit L(¬,∧,→,∀) le langage de 1ère ordre avec égalité contenant :

- **a, b** deux symboles de constante

- **f, g** deux symboles de fonction monaire (arité 1)

- **P** un symbole de prédicat binaire (arité 2)

On définit pour L(¬,∧,→,∀) l'interprétation I de domaine D tel que

**D = {Samedi, Dimanche, Lundi, Mardi, Mercredi, Jeudi, Vendredi}** suivante :

I(a) = Samedi, I(b) = Vendredi,

I(f) = « veille » et I(g)= « demain » Exemples : I(f)(Lundi) = Dimanche et I(g)(Lundi) = Mardi

I(P)(x, y) : « le jour x est suivi par le jour y » Exemple : (Jeudi, Vendredi) ∈ I(P) et (Mardi, Samedi) ∉ I(P)

1. Traduire les phrases suivantes dans le langage précèdent :
2. La veille de Samedi est Vendredi
3. Tous les jours sont des Vendredi
4. Ce n’est pas demain la veille
5. Etudier, pour l’interprétation I, la satisfiabilité et/ou la validité des formules suivantes :
6. ∀x ∀y (P(x, y) → g(x)=y ∧ f(y)=x)
7. ∀x P(f(x), x) → ¬∃x P(x, a)
8. ∀x ∃y P(y, x) → P(a, z)

**BON COURAGE**